



DIMENSI
Jurnal Sains dan Teknologi

Published by Yayasan Yetti Afrida Center Bengkulu

pISSN | eISSN

Vol. 1 No. 1 Oktober 2026 | Pages 1-14

<https://yettiafridacenter.com/Dimensi>

This Article is licensed under a CC BY-SA 4.0 International License

Pemodelan Matematika Berbasis Persamaan Diferensial Untuk Menganalisis Dinamika Pertumbuhan Populasi Dan Keseimbangan Ekosistem

Betti Dian Wahyuni*

Universitas Islam Negeri Fatmawati Sukarno Bengkulu, Indonesia

Email: betty.dian@mail.uinfasbengkulu.ac.id

ABSTRACT

Purpose: This article examines differential-equation-based mathematical models for explaining population growth and assessing ecosystem equilibrium under resource constraints and species interactions. **Design/Methodology:** A conceptual and analytical literature review compares exponential growth, logistic growth, Lotka–Volterra predator–prey dynamics, and functional-response extensions. The models are interpreted through equilibrium points, local stability, parameter sensitivity, and illustrative scenarios; no empirical field dataset is claimed.

Findings: Exponential growth represents an unconstrained baseline, whereas logistic dynamics introduce carrying capacity and a locally stable positive equilibrium under constant parameters. Predator–prey models reveal how interaction terms can produce oscillatory behavior; however, the classical Lotka–Volterra model is neutrally stable and does not, on its own, establish ecological resilience. Density dependence, functional responses, environmental variability, and observation uncertainty substantially affect interpretation. **Practical Implications:** The framework can guide biodiversity monitoring, conservation scenario design, ecological education, and transparent model evaluation, provided parameters are calibrated against appropriate observations and uncertainty is reported.

Originality/Value: The article integrates mathematical equilibrium analysis with ecological interpretation and reproducibility requirements, highlighting the distinction between mathematical stability, persistence, and practical ecosystem resilience.

Keywords: differential equations; population dynamics; logistic growth; predator–prey; ecosystem stability.

Received: 14/09/2026

Accepted: 21/09/2026

Published: 12/10/2026

A. INTRODUCTION (PENDAHULUAN)

Pertumbuhan populasi merupakan salah satu persoalan klasik sekaligus aktual dalam ekologi kuantitatif. Jumlah individu di suatu wilayah tidak hanya dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian, tetapi juga oleh ketersediaan makanan, ruang hidup, kompetisi, migrasi, gangguan iklim, serta hubungan antargatun. Ketika faktor-faktor tersebut berinteraksi sepanjang waktu, perubahan populasi sering berlangsung tidak linear. Oleh sebab itu, pengamatan jumlah individu pada satu waktu tidak cukup untuk menjelaskan proses yang menentukan perubahan berikutnya.

Persamaan diferensial memberikan kerangka untuk menghubungkan laju perubahan populasi dengan kondisi sistem pada saat tertentu. Dalam bentuk paling sederhana, model pertumbuhan eksponensial menggambarkan perubahan yang sebanding dengan ukuran populasi. Pengembangan yang lebih realistis memasukkan kapasitas dukung habitat sehingga pertumbuhan melambat ketika sumber daya semakin terbatas. Hubungan predator dan mangsa

menambah interaksi dua populasi yang dapat menciptakan osilasi dan perubahan kestabilan. Kerangka tersebut telah menjadi landasan penting dalam ekologi matematis (Murray, 2002; Edelstein-Keshet, 2005).

Nilai ilmiah pemodelan terletak pada kemampuannya menjelaskan mekanisme, bukan sekadar menghasilkan garis proyeksi. Persamaan memungkinkan peneliti menanyakan perubahan yang akan terjadi apabila tingkat reproduksi turun, mortalitas meningkat, sumber daya berkurang, atau tekanan predasi berubah. Pertanyaan seperti ini penting untuk memahami daya pulih ekosistem setelah gangguan dan untuk membedakan penurunan yang bersifat sementara dari perubahan struktural yang berpotensi menetap.

Walaupun demikian, model matematika tidak identik dengan kenyataan ekologis. Persamaan hanya menggambarkan hubungan yang dipilih oleh peneliti; spesies dapat mengalami struktur umur, perubahan musim, penyakit, perpindahan ruang, dan adaptasi perilaku yang tidak terwakili dalam model sederhana. Keterbatasan ini membuat pemilihan asumsi, identifikasi parameter, dan verifikasi hasil menjadi bagian tak terpisahkan dari analisis. Dalam pengelolaan ekosistem, prediksi yang terlalu pasti justru berisiko menyesatkan keputusan.

Artikel ini bertujuan menjelaskan prinsip pemodelan pertumbuhan populasi berbasis persamaan diferensial, menguraikan titik keseimbangan serta kestabilannya, dan menilai peluang penerapan model pada persoalan ekologi. Pertanyaan utama yang dijawab adalah bagaimana struktur model menentukan pola pertumbuhan, dalam kondisi apa keseimbangan dapat stabil, dan bagaimana hasil matematis dapat ditafsirkan secara bertanggung jawab. Tulisan ini berupa kajian konseptual-analitis dengan ilustrasi numerik, bukan laporan pengukuran lapangan.

B. LITERATURE REVIEW (KAJIAN PUSTAKA)

Keragaman Proses Ekologis

Ekosistem tersusun atas komponen biotik dan abiotik yang saling memengaruhi. Populasi yang sama dapat tumbuh cepat ketika nutrisi melimpah, tetapi mengalami penurunan ketika kondisi iklim berubah atau habitat terfragmentasi. Dinamika tersebut dipersulit oleh jeda waktu: kelahiran yang terjadi sekarang dapat dipengaruhi oleh ketersediaan sumber daya pada periode sebelumnya. Dengan demikian, hubungan antara kelimpahan sumber daya dan pertumbuhan populasi tidak selalu bersifat langsung.

Kesulitan pengumpulan data bertambah ketika populasi bersifat musiman. Pada spesies serangga, periode reproduksi dan mortalitas dapat terkonsentrasi dalam beberapa minggu; pengambilan sampel pada satu musim mungkin memberi gambaran keliru tentang kecenderungan tahunan. Pada organisme berumur panjang, sebaliknya, perubahan kecil dalam tingkat kelangsungan hidup dewasa dapat lebih menentukan dinamika jangka panjang daripada fluktuasi kelahiran sementara. Resolusi waktu pengamatan karenanya harus selaras dengan siklus biologis. Penggunaan rata-rata tanpa memperhatikan variasi musiman dapat menyamarkan proses yang justru paling penting bagi pengelolaan. Untuk populasi yang tersebar dalam beberapa petak habitat, nilai total juga perlu dilengkapi informasi konektivitas, karena penurunan di satu petak bisa tertutupi peningkatan di lokasi lain. Model spasial atau

model beberapa kompartemen dapat menjadi perluasan jika pendekatan populasi tunggal tidak lagi memadai.

Ketidakpastian Data dan Identifikasi Parameter

Data populasi biasanya diperoleh dari pencacahan, perangkap, transek, kamera, atau indeks kelimpahan. Hasil observasi dapat berbeda dari jumlah individu sebenarnya akibat deteksi yang tidak sempurna, perubahan wilayah survei, dan variasi musiman. Dalam proses kalibrasi, ketidakpastian pengamatan ini harus dibedakan dari ketidakpastian struktur model. Model yang dapat menyesuaikan diri dengan data historis belum tentu mampu melakukan prediksi yang baik.

Parameter laju pertumbuhan intrinsik, kapasitas dukung, tingkat serangan predator, dan mortalitas predator mempunyai interpretasi biologis yang berlainan. Bila pengamatan terlalu jarang, sejumlah kombinasi parameter mungkin menghasilkan trajektori serupa. Kondisi ini dikenal sebagai persoalan identifiabilitas. Karena itu, kualitas estimasi parameter sebaiknya dinilai melalui rentang ketidakpastian, sensitivitas, dan kecocokan terhadap data yang tidak digunakan pada tahap kalibrasi.

Tantangan berikutnya adalah perbedaan skala ruang dan waktu. Data harian mungkin diperlukan untuk serangga berumur pendek, sedangkan dinamika pohon hutan dapat memerlukan pengamatan tahunan. Model agregat yang menganggap habitat homogen bisa gagal saat individu terpisah ke dalam petak-petak ruang dengan konektivitas berbeda. Memilih model yang sederhana tetapi memadai lebih berguna daripada menambah parameter tanpa dukungan informasi.

Keseimbangan sebagai Konsep Dinamis

Keseimbangan ekologis sering dipahami sebagai keadaan jumlah organisme yang selalu tetap. Dalam matematika, titik keseimbangan adalah kondisi ketika turunan terhadap waktu bernilai nol. Definisi ini lebih sempit dan tidak otomatis berarti suatu ekosistem sehat. Sistem dapat berada di titik keseimbangan dengan keanekaragaman rendah atau bahkan setelah salah satu spesies menghilang.

Selain itu, ada perbedaan antara keberadaan keseimbangan dan kestabilannya. Gangguan kecil pada keseimbangan stabil akan mereda, sementara gangguan pada keseimbangan tidak stabil dapat membesar. Untuk sistem nonlinear, perilaku di sekitar titik keseimbangan dapat ditinjau melalui matriks Jacobian dan nilai eigennya; pada kondisi tertentu, analisis lokal perlu dilengkapi simulasi untuk gangguan yang besar (Strogatz, 2018).

Dalam analisis ekologis, istilah keseimbangan tidak boleh dipahami sebagai keadaan ketika seluruh individu berhenti bergerak, bereproduksi, atau mati. Pada titik keseimbangan, laju perubahan bersih suatu besaran dapat mendekati nol meskipun proses kelahiran, kematian, konsumsi, serta perpindahan berlangsung terus-menerus. Perbedaan ini penting ketika menafsirkan hasil survei: jumlah individu yang relatif tetap bisa mencerminkan kompensasi antara kelahiran dan kematian atau dapat pula dihasilkan oleh masuk dan keluarnya individu dari wilayah penelitian. Bahkan ekosistem yang menunjukkan fluktuasi periodik masih mungkin mempertahankan fungsi tertentu. Oleh sebab itu, evaluasi harus memisahkan keseimbangan matematis, kestabilan lokal setelah gangguan kecil, dan ketahanan ekologis terhadap gangguan besar yang mungkin mengubah struktur interaksi spesies.

Asumsi yang Membatasi Penafsiran

Pemodelan klasik umumnya mengasumsikan populasi kontinu dan deterministik. Asumsi tersebut wajar jika jumlah individu besar dan fluktuasi acak relatif kecil, tetapi dapat menjadi lemah untuk spesies langka dengan jumlah individu sedikit. Peristiwa acak, seperti kebakaran, banjir, atau wabah, dapat mengubah trajektori populasi secara mendadak. Bahkan jika parameter rata-rata diketahui, hasil aktual tetap mungkin menyimpang karena kejadian yang tidak diperkirakan.

Hubungan antarspesies pun tidak selalu tetap. Predator dapat memilih mangsa alternatif, individu mangsa dapat mengubah lokasi aktivitas, dan tumbuhan dapat menyesuaikan strategi pertahanan. Dengan demikian, koefisien predasi yang diperlakukan sebagai konstanta harus dinilai sebagai pendekatan untuk rentang kondisi tertentu. Penafsiran model harus menyertakan domain penggunaan: spesies, ruang, periode, serta asumsi pengamatan yang mendasarinya.

C. METHOD (METODE)

Penelitian ini menggunakan pendekatan kajian konseptual-analitis berbasis literatur ekologi matematis. Model eksponensial, logistik, Lotka–Volterra, dan Rosenzweig–MacArthur dibandingkan melalui asumsi, titik keseimbangan, analisis kestabilan lokal, serta interpretasi ekologisnya. Ilustrasi parameter bersifat hipotetis dan tidak dimaksudkan sebagai hasil observasi lapangan. Analisis literatur mencakup perbandingan konsep kestabilan matematis, persistensi, dan resiliensi ekologis.

D. RESULT AND DISCUSSION (HASIL DAN PEMBAHASAN)

Kerangka Analisis Konseptual

Kajian ini menggunakan tiga tingkat kompleksitas, yaitu pertumbuhan eksponensial, pertumbuhan logistik, dan interaksi predator–mangsa. Urutan tersebut dipilih untuk menunjukkan bagaimana tambahan mekanisme ekologis mengubah sifat dinamika. Setiap model dianalisis melalui definisi variabel, asumsi, penentuan titik keseimbangan, serta evaluasi perilaku setelah terjadi gangguan kecil. Untuk ilustrasi, nilai parameter dipilih secara hipotetis dan diberi label eksplisit agar tidak disamakan dengan hasil penelitian lapangan.

Langkah analitis pertama adalah merumuskan besaran yang berubah terhadap waktu sebagai fungsi keadaan. Langkah kedua menentukan domain biologis, yakni populasi tidak negatif. Langkah ketiga mencari kondisi ketika semua turunan bernilai nol. Langkah keempat menguji kestabilan lokal dengan turunan pertama pada model satu populasi atau Jacobian pada model dua populasi. Langkah terakhir menerjemahkan temuan matematis menjadi makna ekologis, tanpa membuat klaim yang melampaui asumsi.

Sifat sederhana model eksponensial sekaligus menjadikannya pembanding yang berguna. Ketika laju pertumbuhan intrinsik positif, solusi meningkat seiring waktu tanpa adanya batas internal; apabila laju bernilai negatif, jumlah populasi mendekati nol. Kedua konsekuensi itu menunjukkan mengapa model eksponensial paling sesuai untuk fase awal kolonisasi atau rentang pengamatan terbatas, bukan untuk menggambarkan suatu habitat yang mempunyai sumber daya terbatas selama waktu panjang. Secara praktis, estimasi laju pertumbuhan dari data singkat perlu disertai kehati-hatian karena nilai yang sama dapat menghasilkan perbedaan proyeksi besar ketika horizon waktu diperpanjang. Selisih kecil pada parameter akan terakumulasi secara multiplikatif. Pembaca karenanya perlu membedakan kegunaan model

sederhana sebagai patokan analitis dari klaim bahwa model tersebut telah mewakili seluruh proses pembatas pertumbuhan di alam.

Model Pertumbuhan Eksponensial

Model paling sederhana berasumsi bahwa laju pertumbuhan bersih per individu tetap. Jika $N(t)$ adalah ukuran populasi pada waktu t dan r adalah laju pertumbuhan intrinsik, maka laju perubahannya proporsional dengan jumlah individu. Secara matematis, model ditulis:

$$dN/dt = rN$$

Dengan syarat awal $N(0) = N_0$, solusinya adalah $N(t) = N_0 e^{rt}$. Jika r positif, populasi meningkat tanpa batas dalam jangka waktu panjang; bila r negatif, populasi menurun mendekati nol. Asumsi pertumbuhan tanpa batas tidak realistis untuk habitat dengan sumber daya terbatas, tetapi model eksponensial dapat membantu menjelaskan fase awal pertumbuhan ketika kepadatan masih rendah.

Satu-satunya titik keseimbangan untuk r yang tidak nol adalah $N^* = 0$. Untuk r positif, gangguan berupa populasi kecil yang lebih besar dari nol menghasilkan pertumbuhan sehingga keseimbangan nol tidak stabil. Sebaliknya, bila r negatif, populasi bergerak mendekati nol. Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan tidak sekadar ditentukan oleh ada tidaknya titik keseimbangan, melainkan oleh tanda parameter pengendali.

Dalam aplikasi ekologis, laju pertumbuhan intrinsik dipengaruhi oleh selisih reproduksi dan mortalitas dalam kondisi yang disederhanakan. Estimasi r dapat menjadi titik awal analisis, tetapi pengamatan pertumbuhan awal saja tidak cukup untuk menyimpulkan lintasan jangka panjang. Perubahan sumber daya dan kepadatan harus dimasukkan apabila model digunakan untuk menjelaskan periode yang lebih panjang.

Model Logistik dan Kapasitas Dukung

Model logistik memperkenalkan kapasitas dukung K yang merepresentasikan tingkat populasi yang dapat dipertahankan oleh lingkungan di bawah seperangkat kondisi. Pertumbuhan masih mendekati eksponensial ketika N jauh lebih kecil daripada K , tetapi berkurang ketika N mendekati K . Persamaannya adalah:

$$dN/dt = rN(1 - N/K), \quad r > 0, K > 0$$

Kapasitas dukung pada model logistik sering dianggap sebagai angka tetap, padahal secara ekologis nilainya dapat berubah. Produktivitas primer, curah hujan, luas ruang hidup, ketersediaan tempat berlindung, serta kualitas habitat memengaruhi jumlah organisme yang dapat dipertahankan suatu lingkungan. Jika beberapa faktor berubah bersama, kapasitas dukung sebaiknya dipahami sebagai parameter efektif pada kondisi dan periode tertentu. Dalam konteks kebijakan lingkungan, peningkatan populasi menuju kapasitas dukung tidak selalu berarti kondisi ekosistem membaik. Sebagai contoh konseptual, spesies invasif juga dapat berkembang menuju tingkat kelimpahan yang tinggi sambil menekan spesies asli. Oleh karena itu, arah pertumbuhan perlu dibaca bersama identitas spesies, fungsi trofik, dan dampaknya bagi komunitas. Interpretasi parameter harus selalu dikaitkan dengan pertanyaan ekologis yang ingin dijawab.

Titik keseimbangan diperoleh dengan menetapkan $dN/dt = 0$, sehingga $N^* = 0$ dan $N^* = K$. Fungsi laju pertumbuhan $f(N) = rN(1 - N/K)$ mempunyai turunan $f'(N) = r(1 - 2N/K)$. Pada N^*

= 0, turunan bernilai r yang positif sehingga titik nol tidak stabil. Pada $N^* = K$, turunan bernilai $-r$ sehingga keseimbangan K stabil secara lokal. Untuk kondisi awal positif, solusi logistik mendekati K dalam jangka panjang.

Solusi eksplisit model logistik dengan nilai awal N_0 adalah $N(t) = K/[1 + ((K - N_0)/N_0)e^{(-rt)}]$. Bentuk ini memberikan gambaran bahwa laju pertumbuhan absolut paling besar ketika N berada di sekitar separuh kapasitas dukung. Walaupun demikian, kapasitas dukung bukan angka yang selalu konstan di alam. Perubahan iklim, nutrisi, aktivitas manusia, dan struktur habitat dapat mengubah nilainya dari waktu ke waktu.

Sebagai ilustrasi hipotetis, ambil $N_0 = 100$ individu, $r = 0,3$ per tahun, dan $K = 1000$ individu. Pada $t = 5$ tahun, formula menghasilkan $N(5)$ sekitar 332 individu; pada $t = 10$ tahun, sekitar 691 individu. Angka ini dihitung dari asumsi terpilih, bukan estimasi suatu spesies tertentu. Nilainya menunjukkan sifat percepatan awal dan perlambatan menjelang K , bukan proyeksi lapangan.

Model logistik berguna untuk menggambarkan kompetisi kepadatan dalam satu populasi. Namun, keberhasilannya bergantung pada apakah pembatasan sumber daya dapat diringkas dalam satu parameter efektif. Jika habitat memiliki perubahan musiman yang kuat atau terjadi efek Allee pada kepadatan rendah, model logistik biasa bisa tidak cukup menjelaskan dinamika yang diamati.

Model Predator–Mangsa Lotka–Volterra

Ketika dua populasi berinteraksi melalui pemangsaan, jumlah individu tidak dapat dipahami secara terpisah. Model Lotka–Volterra klasik menggambarkan perubahan populasi mangsa $x(t)$ dan predator $y(t)$ sebagai hasil reproduksi mangsa, pemangsaan, pertumbuhan predator dari konsumsi mangsa, dan mortalitas predator. Model sederhana ini ditulis:

$$dx/dt = ax - bxy \quad ; \quad dy/dt = cxy - dy$$

Hubungan predator dan mangsa memperlihatkan mengapa dinamika ekosistem tidak dapat dipahami hanya dari satu persamaan. Pertambahan mangsa meningkatkan sumber makanan predator, tetapi kenaikan predator kemudian dapat menurunkan mangsa sehingga tekanan terhadap predator muncul kembali. Umpan balik yang tertunda dalam suatu sistem bisa menghasilkan puncak kelimpahan pada waktu berbeda. Akan tetapi, siklus dalam model ideal tidak otomatis berarti siklus yang sama akan muncul di lapangan. Pada sistem alami, predator sering memanfaatkan lebih dari satu sumber pakan, mangsa mempunyai ruang berlindung, dan sebagian individu berpindah antarwilayah. Perubahan iklim maupun aktivitas manusia dapat memutus asumsi lingkungan tetap. Karena itulah model dua-spesies digunakan terutama untuk memperjelas mekanisme dasar sebelum menilai apakah perlu dikembangkan menjadi model jejaring makanan.

Parameter a adalah pertumbuhan mangsa tanpa predator, b intensitas pertemuan pemangsaan, c konversi interaksi menjadi pertumbuhan predator, dan d mortalitas predator. Semua parameter diasumsikan positif. Dua keseimbangan berada pada $(0,0)$ dan $(d/c, a/b)$. Titik kedua menggambarkan koeksistensi matematis ketika pertumbuhan dan kematian kedua populasi saling mengimbangi.

Jacobian sistem adalah matriks dengan unsur $a - by$, $-bx$ pada baris pertama dan cy , $cx - d$ pada baris kedua. Pada titik koeksistensi $(d/c, a/b)$, jejak Jacobian bernilai nol sedangkan determinannya ad yang positif. Nilai eigen menjadi $\pm i\sqrt{ad}$, sehingga pelinieran menghasilkan

pusat, bukan penarik asimtotik. Pada model klasik ideal, trajektori positif membentuk orbit tertutup dan amplitudo osilasi bergantung pada keadaan awal.

Hasil ini penting untuk interpretasi ekologis. Kehadiran osilasi dalam model klasik tidak berarti setiap ekosistem predator–mangsa harus berosilasi tanpa mereda. Model mengabaikan daya dukung mangsa dan batas konsumsi predator, yang keduanya sering menentukan perilaku ekologis nyata. Oleh karena itu, model Lotka–Volterra lebih tepat dipandang sebagai landasan untuk memahami umpan balik antarpopulasi daripada prediktor lengkap suatu komunitas alami (Murray, 2002).

Misalnya, peningkatan mangsa dapat memperbesar peluang predator memperoleh makanan sehingga predator bertambah. Peningkatan predator kemudian menambah tekanan terhadap mangsa, dan penurunan mangsa akhirnya mengurangi pertumbuhan predator. Interaksi ini menghasilkan umpan balik tertunda secara dinamis sekalipun model tidak menggunakan variabel jeda eksplisit.

Penyempurnaan dengan Respons Fungsional

Dalam praktiknya, predator memiliki waktu terbatas untuk mencari, menangani, dan mengonsumsi mangsa. Holling (1959) menjelaskan pentingnya respons fungsional, yakni perubahan laju konsumsi per predator terhadap kepadatan mangsa. Bentuk tipe II yang sering digunakan adalah $ax/(1 + ahx)$, dengan a sebagai laju serangan dan h sebagai waktu penanganan. Pada kepadatan mangsa tinggi, konsumsi meningkat semakin lambat dan mendekati batas maksimum.

Istilah kestabilan juga membutuhkan batasan matematis yang tepat. Sistem dapat kembali ke titik tetap setelah gangguan kecil, tetapi berpindah menuju keadaan lain apabila gangguannya melewati ambang tertentu. Pada model nonlinier, dua keadaan stabil dapat hadir bersamaan sehingga kondisi awal dan sejarah gangguan menentukan hasil akhir. Analisis linearisasi dengan matriks Jacobian hanya menggambarkan perilaku di sekitar titik yang diuji; kesimpulannya tidak serta-merta berlaku terhadap seluruh ruang keadaan. Apabila nilai eigen mempunyai bagian real negatif, keseimbangan bersifat stabil secara lokal dalam syarat regularitas yang sesuai. Jika terdapat bagian real positif, titik itu tidak stabil. Kasus bernilai real nol memerlukan pendekatan tambahan, karena linearisasi saja dapat gagal memastikan karakter kestabilan nonlinier.

Jika mangsa juga dibatasi oleh kapasitas dukung K , sistem Rosenzweig–MacArthur dapat dituliskan sebagai $dx/dt = rx(1 - x/K) - [ax/(1 + ahx)]y$ dan $dy/dt = e[ax/(1 + ahx)]y - my$. Parameter e adalah efisiensi konversi biomassa mangsa menjadi predator dan m adalah mortalitas predator. Rumusan ini menggabungkan kompetisi pada mangsa dengan keterbatasan konsumsi predator.

Keseimbangan koeksistensi positif memerlukan hubungan $e \cdot a \cdot x^*/(1 + ahx^*) = m$. Dengan penyusunan aljabar, diperoleh $x^* = m/[a(e - mh)]$ selama $e > mh$. Jumlah predator keseimbangan dapat dihitung dari persamaan mangsa setelah x^* diketahui. Agar koeksistensi secara biologis mungkin, x^* harus lebih kecil daripada K dan nilai y^* harus positif. Syarat ini mengingatkan bahwa solusi aljabar belum tentu mempunyai makna ekologis.

Stabilitas keseimbangan koeksistensi pada model ini dipengaruhi oleh parameter yang menggambarkan pertumbuhan, kapasitas dukung, serangan, waktu penanganan, dan konversi.

Peningkatan sumber daya tidak selalu memperkuat kestabilan; pada kondisi tertentu, justru dapat memicu osilasi yang lebih besar. Rosenzweig (1971) membahas paradoks pengayaan, yakni kemungkinan ekosistem predator–mangsa menjadi kurang stabil ketika sumber daya mangsa meningkat. Hal tersebut memperlihatkan pentingnya membedakan jumlah sumber daya dan ketahanan dinamika.

Secara substantif, model dengan respons fungsional lebih fleksibel daripada persamaan interaksi linear sederhana. Namun, ia tetap mengabaikan beberapa proses, misalnya perlindungan mangsa, perilaku berkelompok, kondisi spasial, dan alternatif pakan. Tingkat kompleksitas sebaiknya ditentukan oleh tujuan penelitian serta kemampuan data untuk membedakan antarhipotesis ekologis.

Skenario numerik ilustratif harus dibedakan dari hasil empiris. Angka parameter yang dipilih untuk menunjukkan bentuk kurva tidak bisa dipakai sebagai estimasi populasi suatu kawasan tertentu tanpa prosedur kalibrasi. Untuk menjaga keterlacakan, peneliti sebaiknya melaporkan nilai awal, parameter, satuan waktu, perangkat lunak, metode penyelesaian numerik, serta toleransi galat. Jika hasil sensitif terhadap langkah integrasi atau nilai awal, ketidakpastian itu perlu dinyatakan, bukan disembunyikan melalui satu grafik yang tampak halus. Perbandingan beberapa skenario yang berbeda satu parameter dapat membantu menunjukkan mekanisme yang sedang diuji, sedangkan perubahan banyak parameter sekaligus lebih sulit diinterpretasikan. Prinsip ini penting dalam penelitian berbasis simulasi karena keterulangan perhitungan merupakan syarat agar orang lain dapat menilai ketepatan kesimpulan.

Analisis Kestabilan dan Ketahanan Ekosistem

Pada sistem dua dimensi, nilai eigen Jacobian di titik keseimbangan dapat dianalisis menggunakan jejak T dan determinan D . Jika D positif dan T negatif, kedua nilai eigen memiliki bagian real negatif sehingga keseimbangan stabil secara lokal. Jika D negatif, satu nilai eigen positif dan yang lain negatif, membentuk titik pelana yang tidak stabil. Bila T positif dan D positif, keseimbangan menjadi tidak stabil. Kondisi batas, termasuk $T = 0$, memerlukan pemeriksaan nonlinear lebih lanjut dan tidak dapat diputuskan hanya dari uji linear pertama.

Konsep kestabilan lokal tidak sama dengan resiliensi ekologis. Kestabilan lokal menilai respons terhadap gangguan kecil di dekat keadaan tertentu; resiliensi sering dikaitkan dengan kemampuan sistem menyerap perubahan sambil mempertahankan fungsi atau rezim dinamikanya. Ekosistem dapat mempunyai kesetimbangan yang menarik secara matematis, tetapi masih menghadapi perubahan rezim ketika terjadi gangguan besar. Literatur ekologi menekankan perbedaan antara sifat stabilitas dan konsekuensi kompleksitas interaksi (May, 1972; Holling, 1973).

Analisis matematis yang cermat harus menjawab: apakah titik koeksistensi ada, apakah semua nilai populasi positif, apakah keseimbangan stabil terhadap perubahan kecil, dan adakah lintasan yang menuju kondisi berbeda setelah gangguan besar? Pertanyaan-pertanyaan tersebut membantu menjadikan persamaan sebagai perangkat penalaran ekologis, bukan hanya latihan aljabar.

Kehilangan satu spesies tidak selalu tampak dari nilai keseimbangan positif yang dihitung secara simbolik. Parameter dapat mengalami perubahan sehingga titik koeksistensi bergeser keluar domain biologis. Itulah sebabnya pengamatan parameter dan pengujian batas kondisi

penting untuk evaluasi konservasi. Model juga perlu diperiksa agar tidak memberikan nilai populasi negatif melalui pilihan algoritma numerik yang buruk.

Sensitivitas Parameter

Sensitivitas menunjukkan besarnya perubahan keluaran model akibat variasi parameter. Pada model logistik, kapasitas dukung terutama menentukan tingkat populasi jangka panjang, sedangkan r memengaruhi kecepatan pendekatan ke keseimbangan. Pada model predator–mangsa, mortalitas predator dan efisiensi konversi dapat menentukan ada tidaknya titik koeksistensi. Dengan demikian, tidak semua parameter sama pentingnya untuk setiap sasaran pengelolaan.

Upaya menghubungkan matematika dengan pengamatan alam dapat dimulai dari rancangan pengambilan sampel yang sederhana tetapi konsisten. Peneliti perlu menetapkan definisi individu atau unit pengamatan, interval pencatatan, lokasi pengamatan, dan cara menangani data yang hilang. Jika kelimpahan tidak diamati secara langsung, besaran yang tersedia mungkin hanyalah indeks hasil tangkapan, frekuensi perjumpaan, atau penutupan vegetasi. Indeks tersebut membutuhkan model pengamatan tambahan agar tidak diperlakukan keliru sebagai jumlah individu sesungguhnya. Penggabungan pengamatan ekologis dan estimasi statistik memungkinkan pembatasan rentang parameter, pengujian kesesuaian model, serta pemeriksaan apakah prediksi dapat dipercaya di luar periode kalibrasi. Model yang sederhana namun teruji sering lebih bermanfaat daripada model rumit yang parameternya tidak dapat dikenali dari data.

Uji sensitivitas dapat dilakukan dengan mengubah satu parameter pada suatu waktu atau menggunakan rancangan global yang mempertimbangkan variasi serentak. Pendekatan pertama mudah dipahami, tetapi dapat melewatkan interaksi antarfaktor. Pendekatan kedua lebih bermanfaat ketika parameter berkorelasi dan domain ketidakpastiannya luas. Hasilnya sebaiknya disajikan sebagai variasi trajektori atau rentang keluaran, bukan sebuah garis yang tampak pasti.

Penting pula membedakan sensitivitas numerik dari sensitivitas biologis. Perubahan kecil nilai parameter bisa menyebabkan perbedaan besar setelah waktu simulasi panjang, tetapi hal tersebut tidak selalu membuktikan adanya perubahan nyata di lapangan. Informasi tentang galat estimasi, variasi habitat, dan struktur model harus dipertimbangkan bersama. Prinsip ini sejalan dengan praktik pemodelan ekologis yang menuntut kesesuaian antara tujuan penelitian, bukti empiris, dan tingkat ketidakpastian.

Ilustrasi Skenario dan Batas Penarikan Kesimpulan

Perbandingan sederhana menunjukkan bahwa sistem yang memuat mekanisme berbeda dapat memunculkan perilaku berbeda walaupun sama-sama ditulis sebagai persamaan diferensial. Model eksponensial dengan r positif tidak mempunyai pembatas pertumbuhan. Model logistik dengan r dan K positif akan bergerak menuju kapasitas dukung untuk nilai awal positif. Sistem Lotka–Volterra klasik dapat membentuk siklus yang tidak menuju satu titik secara asimtotik. Model dengan kapasitas dukung dan respons fungsional jenuh dapat menunjukkan koeksistensi yang stabil ataupun pola osilasi bergantung pada parameter.

Ilustrasi berikut bersifat konseptual dan didasarkan pada sifat matematis model, bukan data ekosistem tertentu. Karena tujuan artikel adalah menyusun kerangka interpretasi, tidak

dilakukan klaim mengenai tingkat akurasi empiris atau perbandingan performa yang belum diuji. Untuk penggunaan di suatu kawasan, nilai parameter perlu diperkirakan berdasarkan pengamatan independen, kondisi batas habitat, serta pengetahuan ekologi lokal.

Implikasi dan Arah Pengembangan Model

Integrasi Model dengan Data Lapangan

Pengembangan model yang relevan dimulai dari pertanyaan pengelolaan yang jelas, misalnya apakah tekanan predasi mengancam populasi mangsa, apakah pemanfaatan sumber daya melampaui daya dukung, atau apakah pemulihan habitat mampu mengurangi risiko penurunan populasi. Data yang dikumpulkan kemudian disesuaikan dengan variabel model, bukan sebaliknya.

Reproduksibilitas komputasi juga menuntut dokumentasi keputusan analitis. Dua peneliti bisa memperoleh hasil berbeda meskipun memakai persamaan sama apabila masing-masing menerapkan skema numerik, langkah waktu, pembulatan, atau titik awal yang berlainan. Untuk persoalan yang dapat diselesaikan secara analitis, solusi tertutup bermanfaat sebagai pemeriksaan terhadap kode simulasi. Ketika solusi tertutup tidak tersedia, pengujian konvergensi terhadap perubahan langkah waktu menjadi prosedur yang masuk akal. Grafik sebaiknya disertai label sumbu, satuan, keterangan parameter, dan penjelasan keadaan awal. Menyimpan kode, data yang diizinkan untuk dibagikan, serta petunjuk menjalankan ulang analisis akan meningkatkan keterpercayaan naskah. Keterbukaan tersebut bukan sekadar aspek teknis, tetapi bagian dari etika penyajian hasil ilmiah.

Prosedur yang dapat digunakan mencakup penentuan unit pengamatan yang konsisten, pencatatan kondisi cuaca dan habitat, serta estimasi deteksi spesies jika survei tidak menghitung seluruh individu. Parameter model diperkirakan melalui pencocokan trajektori dengan data, lalu dievaluasi pada periode atau lokasi yang terpisah. Jika ketidakpastian besar, hasil sebaiknya disampaikan sebagai sejumlah skenario yang masuk akal. Dokumentasi asumsi dan prosedur komputasi penting untuk memungkinkan pengujian ulang.

Dalam konteks pendidikan dan riset daerah, proyek kolaboratif dapat dimulai dari masalah yang terukur, seperti dinamika hama tanaman, kualitas habitat perairan, atau pertumbuhan vegetasi rehabilitasi. Kerja bersama matematikawan, biolog, dan pengelola kawasan memungkinkan parameter memperoleh makna ekologis yang tepat. Keterlibatan masyarakat juga dapat membantu mengidentifikasi perubahan lingkungan yang tidak langsung terlihat dalam survei singkat.

Simulasi Komputasi yang Dapat Direproduksi

Persamaan diferensial nonlinear umumnya diselesaikan secara numerik menggunakan skema komputasi yang sesuai, seperti metode Runge–Kutta adaptif. Pemilihan rentang waktu, toleransi kesalahan, dan pengujian ukuran langkah memengaruhi hasil perhitungan. Solusi numerik perlu diperiksa terhadap sifat teoritis yang diketahui, misalnya ketidaknegatifan populasi dan kedekatan dengan keseimbangan pada parameter tertentu.

Agar dapat direproduksi, penelitian sebaiknya menyimpan rumusan model, satuan setiap variabel, nilai parameter, kondisi awal, metode integrasi, dan versi perangkat lunak. Penyajian grafik tanpa informasi tersebut menyulitkan evaluasi. Bila model dipakai sebagai bukti untuk

kebijakan, akses terhadap kode dan data yang tidak melanggar privasi akan memperkuat transparansi serta peluang koreksi.

Penggunaan teknologi komputasi tidak menghilangkan kebutuhan analisis matematis. Simulasi menggambarkan sebagian trajektori dari pilihan kondisi awal, sedangkan analisis keseimbangan menunjukkan sifat struktur yang lebih umum. Penggabungan keduanya menghasilkan argumen yang lebih kuat daripada menggunakan satu metode secara terpisah.

Dalam pengelolaan ekosistem, tindakan manusia dapat mengubah lebih dari satu komponen model pada saat bersamaan. Restorasi vegetasi mungkin menaikkan sumber makanan dan perlindungan bagi mangsa, tetapi juga memperbaiki habitat predator. Pemanenan selektif bisa menurunkan kepadatan organisme target sekaligus mengubah struktur umur yang menentukan laju reproduksi. Oleh sebab itu, kebijakan berbasis keluaran model seharusnya mempertimbangkan beberapa indikator, bukan hanya satu ukuran kelimpahan. Pemodelan menjadi paling berguna ketika dipakai sebagai alat pembandingan pilihan dan sarana merumuskan pertanyaan pengamatan berikutnya. Keputusan konservasi tetap memerlukan pertimbangan ekologis, sosial, dan ekonomi yang tidak seluruhnya dapat direduksi ke dalam persamaan pertumbuhan populasi.

Model Adaptif dan Perubahan Lingkungan

Perubahan penggunaan lahan dan iklim menyebabkan parameter ekosistem tidak selalu tetap. Salah satu arah pengembangan adalah memasukkan kapasitas dukung yang berubah terhadap waktu, misalnya $K(t)$, atau laju pertumbuhan yang dipengaruhi curah hujan dan temperatur. Model demikian dapat menambah relevansi ekologis, tetapi juga meningkatkan kebutuhan data dan risiko ketidakpastian. Model yang lebih kompleks tidak otomatis lebih baik jika kalibrasinya tidak memadai.

Selain pendekatan deterministik, proses acak dapat dimasukkan melalui model stokastik untuk merepresentasikan variasi lingkungan dan demografi. Model spasial juga penting ketika migrasi antarlokasi menentukan persistensi populasi. Pilihan pengembangan seharusnya berangkat dari hipotesis ekologis spesifik. Penambahan komponen perlu menghasilkan peningkatan kemampuan menjelaskan atau menguji pola, bukan sekadar menambah kesan kecanggihan.

Sistem pemantauan adaptif menawarkan alur dua arah: pengamatan terkini digunakan memperbarui parameter, sementara model membantu menentukan variabel mana yang paling informatif untuk survei berikutnya. Pendekatan ini mengakui bahwa model merupakan alat pembelajaran yang terus diperbaiki. Ketika prediksi menyimpang dari pengamatan, penyimpangan tersebut menjadi petunjuk untuk mengevaluasi ulang struktur model dan asumsi, bukan alasan untuk menyembunyikan hasil yang kurang sesuai.

Implikasi bagi Konservasi dan Pendidikan Matematika

Dalam konservasi, model dapat membantu mengeksplorasi konsekuensi dari keputusan sebelum diterapkan. Misalnya, penurunan daya dukung habitat dapat dibandingkan dengan upaya restorasi, sedangkan perubahan mortalitas predator dapat ditelaah untuk memahami kemungkinan gangguan keseimbangan. Namun, tindakan konservasi tidak seharusnya ditentukan oleh satu hasil simulasi tanpa mempertimbangkan bukti lapangan, dampak sosial, dan keragaman spesies.

Bagi pendidikan matematika, dinamika populasi menyediakan konteks yang menjembatani konsep turunan, fungsi nonlinear, matriks, dan nilai eigen dengan persoalan nyata. Mahasiswa dapat diminta menguji arti parameter, mencari keseimbangan, serta membandingkan model logistik dan predator–mangsa. Pembelajaran demikian melatih penalaran kritis: kapan model berguna, mengapa asumsi diperlukan, dan bagaimana mengkomunikasikan ketidakpastian.

Agenda riset berikutnya dapat diarahkan pada perluasan model yang tetap dapat diuji dengan data. Struktur umur memungkinkan perbedaan laju kelahiran dan kematian antarkelompok; dimensi ruang memungkinkan perpindahan dan fragmentasi habitat dimasukkan; sedangkan model stokastik menggambarkan variasi lingkungan atau kejadian acak yang semakin penting pada populasi kecil. Pada setiap perluasan, biaya tambahan berupa kebutuhan data dan parameter harus dipertimbangkan secara eksplisit. Model yang kompleks tidak selalu menghasilkan perkiraan lebih baik apabila informasi empiris tidak cukup untuk mengidentifikasi komponennya. Strategi bertahap—dimulai dari model dasar, membandingkan prediksi dengan data, lalu menambah proses yang diperlukan—memberi dasar metodologis yang lebih dapat dipertanggungjawabkan bagi penelitian lanjutan.

Agenda Penelitian Lanjutan

Pertama, penelitian berikutnya dapat menguji secara empiris model logistik dan model predator–mangsa pada populasi lokal yang mempunyai catatan pengamatan memadai. Perbandingan dilakukan dengan kriteria yang telah ditentukan sejak awal, seperti kemampuan prediksi pada data yang tidak digunakan untuk kalibrasi dan stabilitas estimasi parameter. Kedua, model dapat diperluas untuk memperhitungkan variasi musim, struktur umur, dan heterogenitas ruang ketika terdapat alasan ekologis yang kuat.

Ketiga, pengembangan analisis ketidakpastian perlu diprioritaskan. Banyak persoalan pengelolaan lebih membutuhkan rentang risiko yang dapat dipertanggungjawabkan daripada angka prediksi tunggal. Evaluasi dapat mencakup simulasi parameter yang mungkin, identifikasi ambang perubahan rezim, dan pemeriksaan kesesuaian hasil terhadap asumsi alternatif. Keempat, kolaborasi antardisiplin sebaiknya memastikan bahwa konsep matematis diterjemahkan ke dalam indikator pengamatan yang memang bisa diukur.

Kelima, pengembangan perangkat pembelajaran dan kode simulasi terbuka dapat membantu memperluas pemanfaatan ekologi matematis. Perangkat ini harus menjelaskan satuan parameter, menyediakan contoh yang diketahui hasil analitisnya, dan membedakan data ilustratif dari data penelitian. Akhirnya, pelaporan ilmiah perlu menyatakan secara transparan proses validasi, keterbatasan model, dan kemungkinan dampak keputusan yang diambil berdasarkan simulasi.

E. CONCLUSION (KESIMPULAN)

Persamaan diferensial memberikan bahasa yang sistematis untuk menjelaskan pertumbuhan populasi dan perubahan hubungan antarkomponen ekosistem. Model eksponensial menunjukkan dasar perubahan yang sebanding dengan kelimpahan populasi, sedangkan model logistik memasukkan keterbatasan sumber daya sehingga muncul keseimbangan pada kapasitas dukung. Model Lotka–Volterra memperlihatkan bahwa hubungan predator–mangsa dapat memunculkan osilasi, sementara pengembangan dengan respons fungsional dan kompetisi kepadatan memberikan gambaran perilaku yang lebih beragam.

Secara matematis, analisis keseimbangan dan kestabilan menolong peneliti membedakan keadaan yang mungkin dicapai dengan keadaan yang mampu meredam gangguan. Secara ekologis, hasil tersebut harus dibaca dalam konteks kualitas habitat, perubahan parameter, dan kemungkinan faktor yang belum dimodelkan. Keseimbangan matematis bukan jaminan ekosistem sehat, dan kesesuaian model terhadap data masa lalu bukan jaminan keakuratan masa depan.

Kegunaan utama pemodelan terletak pada kemampuannya menguji asumsi secara terbuka, memperbandingkan skenario, dan membantu merancang pemantauan yang lebih tepat. Integrasi teori matematika, simulasi yang dapat direproduksi, data lapangan, serta pengetahuan ekologis diperlukan agar hasil menjadi dasar pertimbangan yang proporsional. Dengan cara ini, persamaan diferensial dapat mendukung pengelolaan ekosistem yang lebih adaptif dan berbasis bukti tanpa mengabaikan kompleksitas alam.

F. BIBLIOGRAPHY (DAFTAR PUSTAKA)

- Allen, L. J. S. (2007). *An introduction to mathematical biology*. Pearson Prentice Hall.
- Begon, M., Townsend, C. R., & Harper, J. L. (2006). *Ecology: From individuals to ecosystems* (4th ed.). Blackwell Publishing.
- Caswell, H. (2001). *Matrix population models: Construction, analysis, and interpretation* (2nd ed.). Sinauer Associates.
- Clark, C. W. (1990). *Mathematical bioeconomics: The optimal management of renewable resources* (2nd ed.). Wiley.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*. SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719147>
- Gotelli, N. J. (2008). *A primer of ecology* (4th ed.). Sinauer Associates.
- Hastings, A. (1997). *Population biology: Concepts and models*. Springer.
- Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist*, 91(7), 385–398. <https://doi.org/10.4039/Ent91385-7>
- Holling, C. S. (1973). Resilience and stability of ecological systems. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 4, 1–23. <https://doi.org/10.1146/annurev.es.04.110173.000245>
- Kot, M. (2001). *Elements of mathematical ecology*. Cambridge University Press.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins.
- May, R. M. (1972). Will a large complex system be stable? *Nature*, 238, 413–414. <https://doi.org/10.1038/238413a0>
- May, R. M. (1973). *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton University Press.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology I: An introduction* (3rd ed.). Springer.
- Otto, S. P., & Day, T. (2007). *A biologist's guide to mathematical modeling in ecology and evolution*. Princeton University Press.
- Rosenzweig, M. L. (1971). Paradox of enrichment: Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time. *Science*, 171(3969), 385–387. <https://doi.org/10.1126/science.171.3969.385>

Rosenzweig, M. L., & MacArthur, R. H. (1963). Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. *The American Naturalist*, 97(895), 209–223. <https://doi.org/10.1086/282272>

Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2nd ed.). CRC Press.

Turchin, P. (2003). *Complex population dynamics: A theoretical/empirical synthesis*. Princeton University Press.

Volterra, V. (1926). Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, 2, 31–113.